

УДК 532.595.2

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ВОЛНЫ ПАВОДКА НА УЧАСТКЕ ВЕРХНЕЙ И СРЕДНЕЙ ОБИ

А.А. Атавин, Т.Э. Овчинникова, В.Ю. Пасечкина  
Институт водных и экологических проблем СО РАН, Барнаул  
E-mail: atavin@iwep.nsc.ru, teohome@academ.org, pase4kina21@yandex.ru

*Рассматривается пример численного моделирования прохождения волны паводка на участке верхней и средней Оби ниже плотины Новосибирской ГЭС. Расчеты выполнены с использованием численной модели распространения волн половодий и паводков в системе русел STREAM, разработанной в ИВЭП СО РАН. Протяженность участка составляет 1210 км. Учитываются расходы нескольких притоков. Модель демонстрирует устойчивую работу в условиях крупного открытого речного русла. С использованием модельной области для разветвленного русла выполнена оценка погрешности разностного метода, используемого в модели, по правилу Рунге.*

*Ключевые слова:* система русел, паводок, распространение волны, оценка погрешности метода.

DOI: 10.24411/2410-1192-2020-15903

Дата поступления 14.11.2020

### 1. Уравнения модели

Для моделирования распространения волн паводков в системе открытых русел разработана численная модель STREAM, позволяющая описывать течения в системе русел [1-2]. Система русел представляется в виде ориентированного графа типа «дерево» [3, 5], т. е. множество вершин, соединенных между собой отрезками, длины которых равны длинам соответствующих участков русла, и для которых указана начальная и конечная вершины (левый и правый конец).

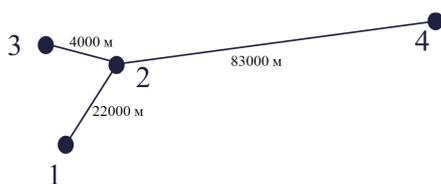


Рис. 1. Схема простого разветвленного русла

В данной модели рассматриваются графы, в которых из каждой вершины (кроме конечной) будет выходить ровно один отрезок, а входить может несколько. Простейший пример такого графа представлен на рисунке 1. Метод нумерации вершин и участков русла подробно описан в [1].

Участки русла описываются одномерными уравнениями Сен-Венана. Пусть  $x$  – расстояние вдоль оси русла (по тальвегу);  $t$  – время;  $z(x, t)$  – ордината свободной поверхности воды в абсолютной системе отсчета (например, в Балтийской);  $z_b(x)$  – отметка дна в этой же системе;  $h(x, t) = z(x, t) - z_b(x)$  – глубина потока;  $b(x, \xi)$  – ширина русла на расстоянии  $\xi$  от дна;  $B = b(x, z)$  – ширина русла на свободной поверхности в сечении  $x$ ;  $Q(x, t)$  – расход воды через

поперечное сечение русла. В этих обозначениях уравнения имеют вид [6–8]:

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_*, \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial v Q}{\partial x} + g \omega \frac{\partial z}{\partial x} = q_* v_* - g \omega \frac{Q|Q|}{K^2}. \quad (2)$$

Здесь  $\omega(x, z) = \int_0^h b(x, \xi) d\xi$  – площадь по-

перечного сечения;  $v = Q / \omega$  – средняя скорость течения;  $q_*(x, t, h)$  – расход путевого притока на единицу длины русла;  $v_*$  – проекция скорости путевого притока на ось  $OX$  (обычно считают  $v_* = 0$ );  $K = C \omega R^{1/2}$  – модуль расхода;  $C$  – коэффициент Шези (в настоящей работе используется формула Маннинга  $C = R^{1/6} / \kappa$ ,  $\kappa$  – коэффициент шероховатости);  $R$  – гидравлический радиус (отношение  $\omega(x, z)$  к смоченному периметру  $\chi(x, z)$ ) [8].

Для получения замкнутой системы на разветвленном русле добавляются условия сопряжения участков в вершинах графа. Может существовать несколько начальных вершин, в которые не входит ни один отрезок («висячие вершины»). В конечную вершину отрезки только входят. Для  $p$ -ой вершины будем обозначать через  $\gamma_+^p$  множество номеров отрезков, входящих в эту вершину, а через  $\gamma^p$  множество номеров всех примыкающих к ней отрезков.

При описании условий на концах отрезков будем использовать следующие обозначения:  $m$  – номер отрезка (нижний индекс);  $p$  – номер вершины (верхний индекс);  $Q_m^p, z_m^p$  – расход и уровень на конце  $m$ -го отрезка, примыкающего к  $p$ -ой вершине;  $Q^p(t), z^p(t)$  – расход сосредоточенного притока в вершину  $p$  и уровень в этой вершине. В вершинах ставятся следующие условия сопряжения.

Баланс расходов:

$$\sum_{m \in \gamma^p} \eta_m^p Q_m^p + Q^p = \Omega^p \frac{dz^p}{dt}, \quad (3)$$

где  $\eta_m^p = -1$  для левого конца отрезка и  $\eta_m^p = 1$  для правого конца отрезка;  $\Omega^p(z^p)$  – площадь сосредоточенной емкости в  $p$ -ой вершине (при отсутствии емкости = 0).

Связь между параметрами в вершине:

$$g^p(z^p, Q^p, t) = 0. \quad (4)$$

Например,  $Q^p = 0$  – приток отсутствует;  $Q^p = Q(t)$  – приток есть функция времени;  $Q^p = -Q(z^p)$  – отток из вершины.

Условия примыкания:

$$f^p(z_m^p, Q_m^p, t) = 0, \quad m \in \gamma^p. \quad (5)$$

Одним из часто используемых вариантов условия является *простой подход к вершине*:

$$z_m^p = z^p. \quad (6)$$

В качестве начальных условий должны быть заданы

$$z_m(x, t_0), Q_m(x, t_0), \forall m; \quad z^p(t_0), \forall p. \quad (7)$$

Система уравнений (1)–(2) приводится к характеристической форме, которая в векторной записи имеет вид [1, 9]:

$$\bar{S} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\Lambda} \bar{S} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \bar{F}, \quad (8)$$

где

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} z \\ Q \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} -B \cdot (v - c) & 1 \\ -B \cdot (v + c) & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} v + c & 0 \\ 0 & v - c \end{bmatrix}, \quad c = \sqrt{\frac{g \omega}{B}}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} v^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{h=const} - B \frac{dz_b}{dx} - g \omega \frac{Q|Q|}{K^2} + q_* \cdot (v - v + c) \\ v^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{h=const} - B \frac{dz_b}{dx} - g \omega \frac{Q|Q|}{K^2} + q_* \cdot (v - v - c) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} F_1(u) \\ F_2(u) \end{bmatrix}.$$

Уравнения (7) вместе с условиями сопряжения (3)–(5) образуют замкнутую систему, которая после дискретизации дает систему линейных алгебраических уравнений. Дискретизация задачи реализуется следующим образом [1]. Шаг

по времени  $\tau_k$  задается одинаковым для всех отрезков, но может меняться в продолжение расчета;  $k$  – номер шага. Для  $m$ -го отрезка задается количество шагов по  $x$   $N_m$  и строится равномерная сетка узлов с шагом  $hx_m = L_m/N_m$ . Рассматриваются сеточные вектор-функции на отрезке

$$\bar{\Phi}_{mn}^k = \bar{\Phi}(t^k, x_n), \quad t^k = t_0 + \sum_{j=1}^k \tau_j, \quad x_n = n \cdot hx_m,$$

$$\bar{\Phi} = \bar{u}, \bar{F}, \bar{S}, \bar{\Lambda}, \quad n = 0, 1, \dots, N_m$$

Далее строится система разностных уравнений. Во внутренних точках отрезков она выглядит следующим образом:

$$\bar{S}_{mn}^k \cdot \frac{\bar{u}_{mn}^{k+1} - \bar{u}_{mn}^k}{\tau_k} + (\bar{\Lambda} \bar{S})_{mn}^k \cdot \frac{\bar{u}_{mn+1}^{k+1} - \bar{u}_{mn-1}^{k+1}}{2hx_m} = \bar{F}_{mn}^k + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{u}} \cdot (\bar{u}_{mn}^{k+1} - \bar{u}_{mn}^k) \quad (9)$$

$$m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N_m - 1.$$

Выражение (9) можно привести к виду:

$$\bar{A}_{mn} \cdot (\bar{u}_{mn+1}^{k+1} - \bar{u}_{mn-1}^{k+1}) + \bar{C}_{mn} \cdot \bar{u}_{mn}^{k+1} = \bar{D}_{mn}, \quad (10)$$

где

$$\bar{A}_{mn} = \frac{\tau_k}{2hx_m} (\bar{\Lambda} \bar{S})_{mn}^k;$$

$$\bar{C}_{mn} = \bar{S}_{mn}^k - \tau_k \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{u}} \right)_{mn}^k;$$

$$\bar{D}_{mn} = \tau_k \bar{F}_{mn}^k + \bar{C}_{mn} \bar{u}_{mn}^k,$$

Для получения сквозной схемы расчета по всем участкам в вершинах линеаризуются условия сопряжения и включаются в численный алгоритм [1]. При решении системы используется неявный метод Института гидродинамики (метод прогонки для трехдиагональных матриц) [5].

## 2. Численная оценка скорости сходимости и погрешности метода

Схема (8) при отсутствии конвективного члена имеет второй порядок точности по пространственной переменной, но наличие линеаризованной функции  $F$ , как правило, понижает по-

рядок. Также на порядке сходимости может сказаться реализация условий сопряжения в вершинах графа. В этом случае можно получить приближенную численную оценку локального порядка точности, используя формулу Рунге [10-12]. Для этого используются решения задачи на последовательности вложенных сеток с достаточно малыми шагами  $hx_1 = h$ ,  $hx_2 = h/2$ ,  $hx_3 = h/4$ . В нашей задаче оценка выполнялась для функции  $Q(x, t)$ , поскольку она определяется из уравнения (2), содержащего конвективный член. Выберем момент времени  $T$ , на который будет определяться порядок сходимости. Обозначим через  $Q_{hx_i}$  решение, полученное на момент  $T$  на сетке с шагом  $hx_i$ . Тогда согласно формуле Рунге порядок сходимости определяется соотношением

$$r(T, Q, x) = \log_2 \left( \frac{|\delta Q_1(T, x)|}{|\delta Q_2(T, x)|} \right), \quad (11)$$

$$\delta Q_i = Q_{hx_i} - Q_{hx_{i+1}}$$

Задача (1)–(2) была просчитана в модельной области с простой схемой, приведенный на рисунке 1. Геометрические и гидрологические параметры расчетной области на участках 1 и 2 основаны на данных по участку р. Обь от плотины Новосибирской ГЭС до с. Дубровино [13]. Приток (участок 3) моделировался в виде канала с постоянной прямоугольной геометрией сечения. В качестве краевых условий в вершинах 1, 3 задавался постоянный расход  $Q_1(t) = 2370 \text{ м}^3/\text{с}$  и  $Q_3(t) \cong 0.5Q_1(t)$ . В вершине 4 задавалась кривая связи  $Q(z)$  [13]. Условия расчета были следующие:

$$\tau = 1 \text{ ч}; \quad h = 0.5 \text{ км}; \quad T = 72 \text{ ч}. \quad (12)$$

Расчеты показали, что на большей части модельной области локальный порядок сходимости близок к 2 (рис. 2). Исключение составляет участок вблизи вершины 1, где наблюдаются колебания значения, которое остается, однако, больше 1.7. Это связано с влиянием реализации краевого условия в начальных

вершинах. На основе полученного результата можно получить зависимость величины погрешности от шага сетки, используя правило Рунге [9-10]. Погрешность определяется выражением

$$Err = \max_j \frac{|Q_{hx_i}(x_j) - Q_{hx_{i+1}}(x_j)|}{2^p - 1}, \quad (13)$$

где  $p$  – порядок аппроксимации. Принимая  $p = 2$ , получаем зависимость ошибки от шага сетки (рис. 3).

Как видно из графика, погрешность быстро убывает с уменьшением пространственного шага, причем скорость убывания постепенно уменьшается по мере приближения к точному решению.

### 3. Использование модели в условиях реального русла. Результаты численных экспериментов

В качестве расчетной области использовался участок верхней и средней Оби (протяженностью 1210 км) от пло-

тины Новосибирской ГЭС (створ НБ) до створа в с. Александровское (концевая вершина графа, рис. 4). Модель русла включает 13 створов (табл. 1), в т.ч. точки впадения шести наиболее крупных притоков. Таким образом, граф состоит из 12 отрезков. Притоки рассматривались как сосредоточенные источники с заданными расходами ввиду отсутствия подробной информации.

Использовались следующие условия сопряжения. Для всех вершин – баланс расходов (4). Для вершины 1 задан расход  $Q^p = Q(t)$  (поскольку вершина является начальной, достаточно одного условия). Для вершин с притоками заданы условия  $Q^p = Q(t)$  и условие простого подхода (6); таким образом, расход притока реализуется через баланс расходов в узле.

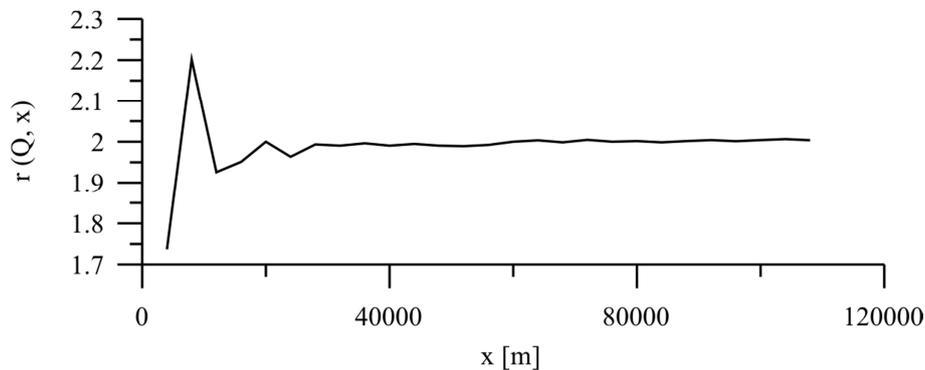


Рис. 2. Распределение локального порядка сходимости при  $T = 72$  ч.

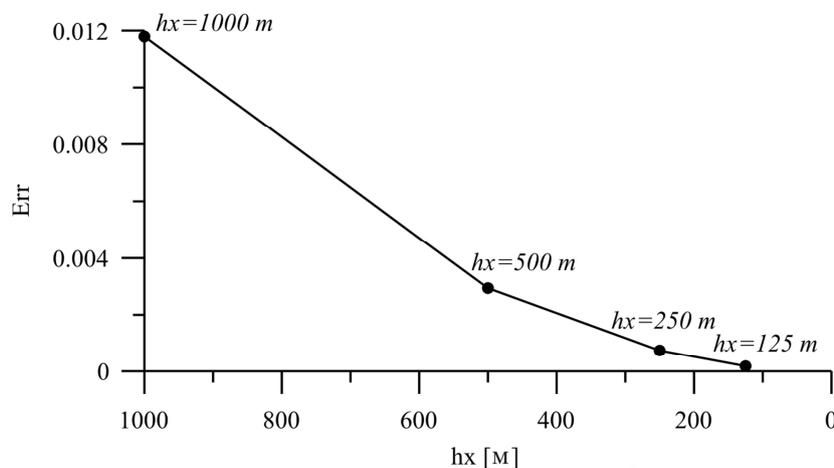


Рис. 3. Погрешность  $Err$  (13),  $m^3/c$ :

$hx$  – величина пространственного шага сетки, м.

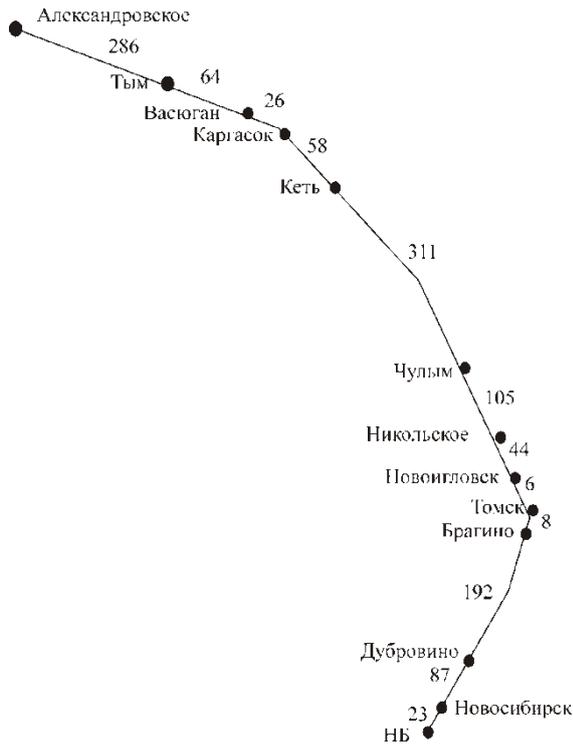


Рис. 4. Схема участка р. Обь  
с указанием расстояний между створами, км

Для внутренних вершин без притоков ставятся условия  $Q^p = 0$  и условие простого подхода (6). Для концевой вершины 13 используется условие  $Q^p = -Q(z^p)$ , где  $Q(z^p)$  кривая связи для концевой вершины. Кривые расходов часто используются при расчетах неустановившихся течений в руслах [2]. Для выполнения расчетов мы построили кривую связи, используя данные гидрологического ежегодника по нескольким годам (рис. 5).

Расчеты были выполнены для среднего по водности 2014 г. Расчетный период составлял четыре месяца (май-август). При сборе гидрологических данных для численного моделирования использовались интернет-ресурсы АИС ГВМО. Начальные условия также задавались с использованием данных АИС ГВМО.

Морфометрическая информация по створам 1-3 построена с использованием лоцманской карты. Для створов 4, 6, 7, 10, 13 геометрия построена по экспедиционным данным.

Таблица 1  
Расстояние между створами  
и плотинной ГЭС (НБ), км

Створы	Расстояние
1. НБ	0
2. Новосибирск (приток Иня)	23
3. Дубровино	110
4. Брагино	302
5. Томь (приток)	310
6. Новоигловск	316
7. Никольское	360
8. Чулым (приток)	465
9. Кеть (приток)	776
10. Каргасок	834
11. Васюган (приток)	860
12. Тым (приток)	924
13. Александровское	1210

В вершинах впадения притоков морфометрическая информация получена интерполяцией по ближайшим створам с заданными данными измерений (из-за сложности получения натуральных данных в таких пунктах). На рисунке 6 приведены графики распределения расчетных значений расходов и уровней вдоль русла. Скачки расхода соответствуют местам впадения притоков.

На рисунке 7-8 показана динамика уровней и расходов в с. Дубровино (вершина 3) и с. Александровское (концевая вершина 13), полученная по натурным наблюдениям и в результате расчетов на конец расчетного периода.

Сравнение данных в с. Дубровино показывает достаточно хорошее согласование. Количественно расчетные данные сильнее отклоняются от данных наблюдений в середине расчетного периода. На этом участке нет значительных притоков. В расчетах учитывается только р. Иня, но, по-видимому, необходимы более точные данные о расходах путевых притоков.

Данные поста наблюдения в с. Александровское показывают более значительные расхождения с результатами расчетов. Основной причиной этого является недостаток информации по притокам.

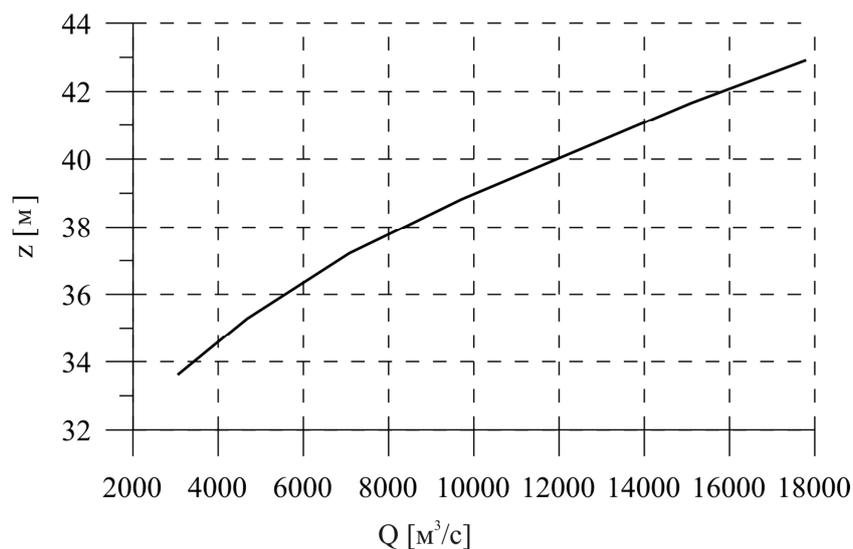


Рис. 5. Кривая связи  $Q(z)$ :  
пост наблюдения – с. Александровское.

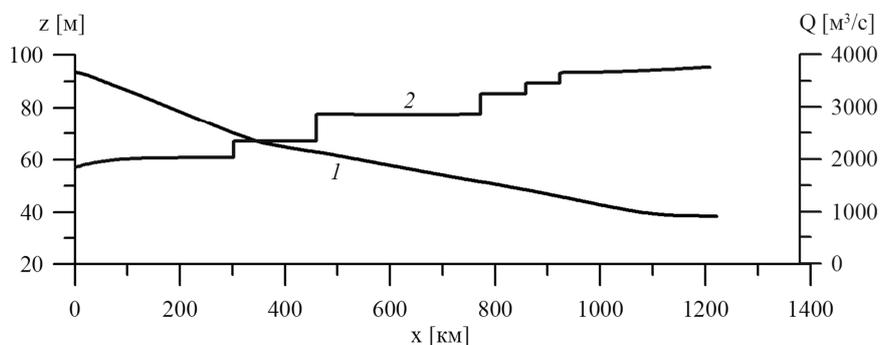


Рис. 6. Распределение расхода и уровня по длине  
на конец расчетного периода по данным 2014 г.:  
1 – уровень; 2 – расход.

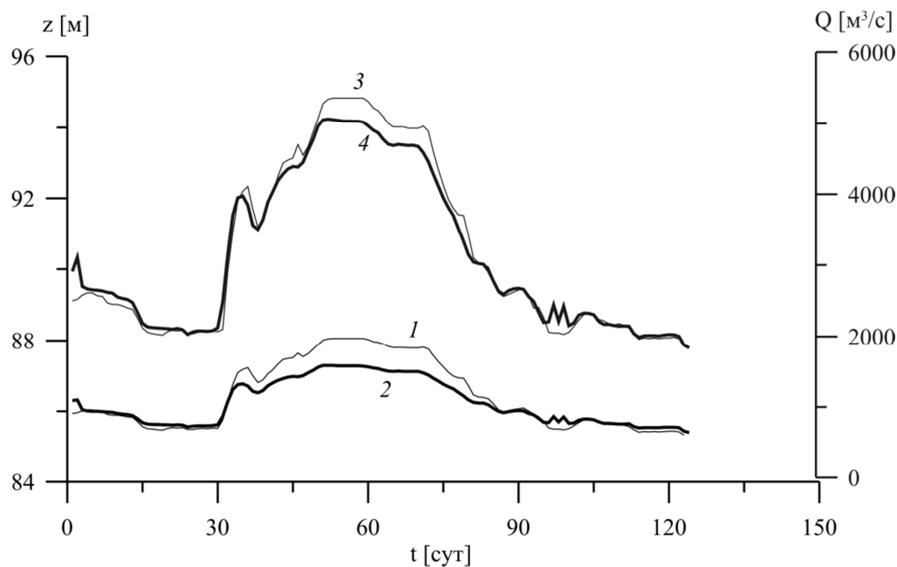


Рис. 7. Динамика уровней и расходов в с. Дубровино:  
1 – уровень, наблюдения; 2 – уровень, результаты расчетов; 3 – расход, наблюдения;  
4 – расход, результаты расчетов.

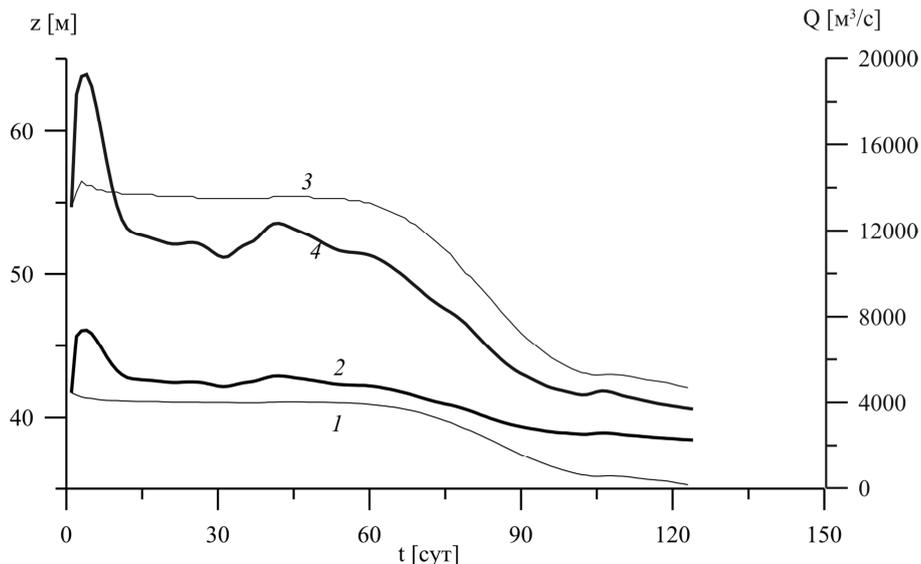


Рис. 8. Динамика уровней и расходов в с. Александровское:  
 1 – уровень, наблюдения; 2 – уровень, результаты расчетов; 3 – расход, наблюдения;  
 4 – расход, результаты расчетов.

Скачок расходов и уровней в начале периода связан с заданием начальных условий в вершинах 11 и 12, для которых не было требуемых данных наблюдений (морфометрическая и гидрологическая информация). В этих вершинах данные получены линейной интерполяцией данных вершин 10, 13, что не является корректным.

#### 4. Заключение

Сопоставление результатов расчета с натурными данными демонстрирует приемлемую степень согласования и подтверждает возможность использования предлагаемой постановки задачи и методики расчета распространения паводков на всем протяжении р. Обь от створа НГЭС до устья. Программа

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИВЭП СО РАН (номер государственной регистрации проекта – АААА-А17-117041210241-4).*

#### Список литературы

1. Атавин А.А. Расчет неустановившегося течения воды в разветвленных системах речных русел или каналов // *Динамика сплошных сред.* – 1975. – Вып. 22. – С. 25-36.
2. Атавин А.А., Гладышев М.Т., Шугрин С.М. О разрывных течениях в открытых руслах // *Динамика сплошной среды.* – Новосибирск, 1975. – Вып. 22. – С. 37-64.
3. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1978. – 300 с.
4. Понтрягин Л.С. Основы комбинаторной топологии. – М.: Наука, 1986. – 118 с.
5. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем. – Новосибирск: Наука, 1993. – 368 с.

6. Васильев О.Ф., Годунов С.К., Притвиц Н.А., Темноева Т.А., Шугрин С.М., Фрязина И.Л. Численный метод расчета распространения длинных волн в открытых руслах и приложение его к задаче о паводке // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 3. – С. 525-527.
7. Атавин А.А., Васильев О.Ф. Нестационарные задачи гидравлики открытых русел и судоходных сооружений // Механика сплошных сред. – София, 1968. – С. 75-82.
8. Грушевский М.С. Неустановившееся движение воды в реках и каналах. – Л.: Гидрометеиздат, 1982. – 288 с.
9. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1968. – 687 с.
10. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1966.
11. Бочаров О.Б., Осокин А.Е. Численное исследование автомодельных задач неизо-термической двухфазной фильтрации // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2002. – Е. 5. – № 1(9). – С. 8-19.
12. Остапенко В.В., Ковыркина О.А. О сходимости разностных схем сквозного счета // ДАН. – 2010. – Т 433. – № 5. – С. 599-603.
13. Атавин А.А., Овчинникова Т.Э., Пасечкина В.Ю. Численная модель прохождения волн паводков в системе разветвленных русел // Изв. АО РГО. – 2019. – № 4 (55). – С. 51-56.

#### *References*

1. Atavin A.A. Raschet neustanovivshegosya techeniya vody v razvetvlennykh sistemakh rechnykh rusel ili kanalov // Dinamika sploshnykh sred. – 1975. – Vyp. 22. – S. 25-36.
2. Atavin A.A., Gladyshev M.T., Shugrin S.M. O razryvnykh techeniyakh v otkrytykh ruslakh // Dinamika sploshnoy sredy. – Novosibirsk, 1975. – Vyp. 22. – S. 37-64.
3. Kharari F. Teoriya grafov. – М.: Mir, 1978. – 300 s.
4. Pontryagin L.S. Osnovy kombinatornoy topologii. – М.: Nauka. 1986. – 118 s.
5. Voyevodin A.F., Shugrin S.M. Metody resheniya odnomernykh evolyutsionnykh sistem. – Novosibirsk: Nauka, 1993. – 368 s.
6. Vasilyev O.F., Godunov S.K., Pritvits N.A., Temnoyeva T.A., Shugrin S.M., Fryazina I.L. Chislenny metod rascheta rasprostraneniya dlinnykh voln v otkrytykh ruslakh i prilozheniye ego k zadache o pavodke // DAN SSSR. – 1963. – Т. 151. – № 3. – S. 525-527.
7. Atavin A.A., Vasilyev O.F. Nestatsionarnye zadachi gidravliki otkrytykh rusel i sudokhodnykh sooruzheny // Mekhanika sploshnykh sred. – Sofiya: Izd. BAN, 1968. – S. 75-82.
8. Grushevsky M.S. Neustanovivsheyesya dvizheniye vody v rekakh i kanalakh. – L.: Gidrometeoizdat, 1982. – 288 s.
9. Rozhdestvensky B.L., Yanenko N.N. Sistemy kvazilineynykh uravneny i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike. – М.: Nauka, 1968. – 687 s.
10. Berezin I.S., Zhidkov N.P. Metody vychisleny. – М.: Nauka, 1966.
11. Bocharov O.B., Osokin A.E. Chislennoye issledovaniye avtomodelnykh zadach neizotermicheskoy dvukhfaznoy filtratsii // Sibirsky zhurnal industrialnoy matematiki. – 2002. – Ye. 5. – № 1(9). – S. 8-19.
12. Ostapenko V.V., Kovyorkina O.A. O skhodimosti raznostnykh skhem skvoznogo scheta // DAN. – 2010. – Т 433. – № 5. – S. 599-603.
13. Atavin A.A., Ovchinnikova T.E., Pasechkina V.Yu. Numerical model of the flood wave propagation in the system of branched channels // Bulletin of the Altay Branch of the Russian Geographical Society. – 2019. – 55 (4). – P. 51-56.

## MATHEMATICAL MODELLING OF THE FLOOD WAVE PROPAGATION IN THE SECTION OF UPPER AND MIDDLE PART OF RIVER OB

A.A. Atavin, T.E. Ovchinnikova, V.Yu. Pasechkina

*Institute for Water and Environmental Problems of the SB RAS, Barnaul*

*E-mail: atavin@iwep.nsc.ru, teohome@academ.org, pase4kina21@yandex.ru*

*An example of numerical simulation of the flood wave propagation in the section of upper and middle part of river Ob below the dam of Novosibirsk power station. The calculations are carried out using of numerical model of the flood wave propagation in the system of branched channels STREAM developed in IWEP SB RAS. The length of the section is 1210 km. The number of river tributary are taken into account. The model demonstrates stable operation in a large open river channel. The error of the difference method of solution was estimated according to the rule by Runge was fulfilled using a model region of branched river channel.*

*Keywords: branched river channel, flood, wave propagation, the method error estimation.*

*Received November 25, 2020*